ОТЗЫВ

официального оппонента д-ра физ.-мат. наук Лавита Игоря Михайловича на диссертацию Рязанцевой Елены Анатольевны «Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера», представленную на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Прогресс теории упругости в последние десятилетия связан, в основном, с развитием численных методов решения сложных задач. Наряду с методами непосредственной дискретизации или системы дифференциальных уравнений (метод конечных разностей), или вариационного уравнения задачи (методы Ритца, конечных элементов), разрабатываются методы, в основу которых кладется какое-либо общее решение системы уравнений теории упругости. Из них наиболее известен метод граничных элементов, в котором используется фундаментальное решение упомянутых уравнений. Эффективность таких численно-аналитических методов обусловлена тем, что в них сочетаются оба подхода к решению задачи: аналитический и численный. Там где это возможно, применяется аналитический подход. Предполагается, и это обычно не оспаривается, что источником погрешности решения является необходимая при численном решении дискретизация. Поэтому чем в большей степени в методе используется аналитический подход, тем больше оснований рассчитывать на высокую эффективность метода.

Один из таких методов, называемый методом граничных состояний, предложен научным руководителем диссертанта – проф. В.Б. Пеньковым в соавторстве с В.В. Пеньковым. К настоящему времени этим методом решен ряд разнообразных сложных задач, что позволяет сделать вывод об эффективности метода.

Среди задач теории упругости особое место занимают задачи, решение которых имеет особые точки или линии (в случае пространственных задач). При численном решении возникает вопрос, нужно ли как-то специально моделировать сингулярность решения, а если нужно, то как это сделать? В случае действия сосредоточенных сил и моментов интерес представляет распределение напряжений вдали от точек приложения сил. Поэтому, руководствуясь принципом Сен-Венана, можно использовать обычные координатные функции, фактически "размазывая" особенность по небольшой области, причем, размеры этой области оказываются несущественными. Иначе обстоит дело в механике разрушения. Здесь для построения корректного численного решения[1] необходимо использовать специальные

[1] То есть сходящегося к определенному пределу с увеличением числа координатных функций.

процедуры, направленные на то, чтобы так или иначе включить известную асимптотику сингулярного решения в базис координатных функций.

Этой проблеме применительно к методу граничных состояний посвящена рассматриваемая диссертация, что свидетельствует об **актуальности** ее темы.

В диссертации Е.А. Рязанцевой новый общий численный метод решения задач теории упругости, называемый методом граничных состояний, применен к решению ряда сингулярных задач теории упругости. Из известных численных методов метод граничных состояний наиболее близок к методу Треффтца. Суть метода лучше всего увидеть на примере плоской задачи теории упругости. Пусть, например, односвязная область D нагружена вдоль граничного контура L распределенной нагрузкой $\mathbf{q}$. Решение задачи теории упругости сводится в данном случае, как известно, к решению бигармонического уравнения при определенных граничных условиях. В рассмотрение вводится множество функций, суммируемых с квадратом в области D и удовлетворяющих в этой области бигармоническому уравнению. Присоединив к этому множеству его предельные точки и введя обычным образом скалярное произведение, получим сепарабельное гильбертово пространство. В таком пространстве, как известно[2], всегда существует счетный базис $\{\psi_n\}$. Пусть ψ_i – некоторый элемент этого базиса. Ему соответствует определенное распределение $\mathbf{p}_i$ поверхностной нагрузки, получаемое в результате применения обратного метода решения задач теории упругости. Приходим к взаимно-однозначному соответствию множеств $\{\psi_n\}$ и $\{\mathbf{p}_n\}$. Последнее можно рассматривать как базис в гильбертовом пространстве векторных функций $\mathbf{p}$, в котором скалярное произведение представляется интегралом вдоль граничного контура L. Раскладывая заданную нагрузку $\mathbf{q}$ в ряд по базису $\{\mathbf{p}_n\}$, одновременно получаем решение задачи в виде ряда по базису $\{\psi_n\}$ с теми же самыми коэффициентами разложения.

Основная проблема применения метода заключается в построении базиса $\{\psi_n\}$. Этот базис всегда можно, в принципе, построить, если известно общее решение поставленной задачи, например, решение Гурса (Колосова-Мусхелишвили) плоской задачи или решение Папковича-Нейбера пространственной задачи теории упругости. В данной работе к построенному базису добавляется известное сингулярное решение.

Первая глава диссертации посвящена обзору основных энергетических методов, их достоинств и недостатков; приведены основные положения метода граничных состояний и проанализированы полученные результаты. В первой главе рассмотрены также некоторые задачи теории упругости с

---

[2] *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 416 с.

особенностями, обусловленными сосредоточенными силами или негладкостью границы.

Вторая глава посвящена задачам теории упругости, содержащим особенности физического характера: проведена классификация, обоснован метод генерирования базиса пространства внутренних состояний для задач данного класса, решен ряд краевых задач с различными особенностями физического характера (сосредоточенная сила, скачок нормального усилия).

В третьей главе представлена классификация особенностей геометрического характера, выделена асимптотика сингулярности (для рассматриваемой задачи). Эта асимптотика входит как составная часть в базис пространства внутренних состояний. Решен ряд задач с сингулярностями геометрического характера, физического и геометрического характера, а также задача для многосвязной области с геометрической особенностью.

Представленные в диссертации решения задач обладают **научной новизной**. **Достоверность** полученных результатов обусловлена ранее доказанной математической корректностью примененного метода решения – метода граничных состояний. **Практическая ценность** данной работы – это, прежде всего, демонстрация возможностей метода граничных состояний, его эффективности. Благодаря исследованиям Е.А. Рязанцевой можно рассматривать метод граничных состояний как вполне надежный численно-аналитический метод решения краевых задач теории упругости с особенностями геометрического и физического характера.

К диссертации имеется ряд замечаний.

1. На стр. 18 утверждается, что пространство внутренних состояний является гильбертовым. Как известно, элементы гильбертова пространства однородны, в том смысле, что скалярное произведение определено для произвольной пары элементов. Но пространство внутренних состояний, определенное равенством (1.4), представляет собой объединение трех различных множеств, причем скалярное произведение определено как произведение элемента второго множества на элемент третьего.
2. Задачи о круглом диске, рассмотренные в п. 2.3, имеют аналитическое решение. Однако сопоставление результатов численных решений с аналитическими отсутствует.
3. В списке литературы под номером 149 дана ссылка на главу 12 английского издания учебника Тимошенко и Гудьера. Зачем это? Этот учебник издан на русском языке и в нем есть эта глава 12: "Осесимметричные напряжения и деформации в телах вращения".
4. В диссертации немало стилистических, синтаксических и даже орфографических ошибок. Есть и непонятные фразы. Например, на стр. 21 говорится о "больших значениях дифференциалов в особых точках". На стр. 24: "Вероятность возникновения напряженного состояния с сингулярностью в точке зависит от комплексных корней, для которых $\mathrm{Re}\lambda_k < 1$. Чем больше указанных корней, тем выше вероятность...". Но для

задач, рассмотренных в диссертации, справедлива теорема о единственности решения. Поэтому терминология теории вероятностей применительно к ним бессмысленна, а потому и неуместна.

Эти замечания не влияют на оценку диссертации. Результат диссертации – решение разнообразных задач с особенностями методом граничных состояний – представляет собой заметный вклад в теорию численных методов решения задач теории упругости.

Содержание диссертации достаточно полно, подробно и ясно раскрывает постановку, методы и результаты решения рассмотренных задач. Оформление диссертации не вызывает претензий. Основные результаты диссертации опубликованы в научной печати. Содержание автореферата соответствует основным положениям диссертации. Язык и стиль диссертации и автореферата соответствуют нормам научных публикаций.

Изложенное позволяет сделать вывод, что кандидатская диссертация Е.А. Рязанцевой является законченной научно-исследовательской работой, содержащей постановку и решение новым численным методом ряда задач теории упругости. Полученные в диссертации результаты имеют существенное значение для механики деформируемого твердого тела. Соискатель, Е.А. Рязанцева, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела.

Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования
ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

И.М. Лавит

Адрес: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92
E-mail: info@tsu.tula.ru
Телефон: (4872) 35-34-44

Подпись Лавита Игоря Михайловича удостоверяю.
Начальник УАК ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

М.В. Метелищенкова

31.08.15